Analiza funkcjonalna

Egzamin poprawkowy 27.06.2013 r.

1. (a) Podać kryterium zupełności przestrzeni unormowanej w języku szeregów. (3p)

   Rozwiązanie: Przestrzeń unormowana jest zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny, tzn. dla każdego ciągu wektorów (x_n) warunek $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ pociąga za sobą istnienie takiego wektora x, że $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

   Typowe błędy: Pisanie, że przestrzeń jest zupełna, jeśli każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest w niej zbieżny — podany warunek jest konieczny i dostateczny.

   Pokazać, że żaden z poniższych wzorów nie określa normy na $\mathbb{R}^n$:

   (b)

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n-1} |x_i| \qquad (4p)$$

   Rozwiązanie: Niech $x = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$. Wtedy $\|x\|_1 = 0$, ale $x \neq 0$, tymczasem prawdziwa norma powinna przyjmować wartośc 0 tylko na wektorze zerowym.

   (c)

$$\|x\|_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad (5p)$$

   Rozwiązanie: Dla dowolnego niezerowego wektora $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mamy $\|2x\|_2 = \sum(2x_i)^2 = 4\sum x_i^2 = 4\|x\|_2$, czyli nasza funkcja nie jest jednorodna (powinno być $\|2x\|_2 = 2\|x\|_2$).

2. (a) Podać definicję dopełnienia ortogonalnego $Y^{\perp}$ podprzestrzeni Y w przestrzeni unitarnej X. (4p)

   Rozwiązanie: $Y^{\perp} = \{x \in X : \forall y \in Y \ \langle x, y \rangle = 0\}$.

   (b) Pokazać, że jeśli wektory x i y w rzeczywistej przestrzeni Hilberta spełniają warunek

$$\text{dla każdego } \lambda \in \mathbb{R} \text{ jest } \|x + \lambda y\| \geq \|x\|,$$

   to są one ortogonalne. (5p)

   Rozwiązanie: Skorzystamy z tego, że dla dowolnego wektora v mamy $\|v\|^2 =< v, v >$, a także z liniowości iloczynu skalarnego względem obu współrzędnych i jego symetryczności (jesteśmy w przestrzeni rzeczywistej):

$$\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$$

$$\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$$

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle \geq \langle x, x \rangle$$

$$\langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle \geq \langle x, x \rangle$$

$$2\lambda \langle x, y\rangle + \lambda^2 \langle y, y\rangle \geq 0$$

Jeśli $y = 0$, to y jest ortogonalny do x, tak samo jak do każdego innego wektora. Jeśli natomiast $y \neq 0$, to potraktujmy powyższe wyrażenie jako trójmian kwadratowy w zmiennej λ. Jest on stale nieujemny, czyli ma co najwyżej jedno miejsce zerowe, a więc jego wyróżnik musi być niedodatni. Innymi słowy

$$0 \geq \Delta = 4\langle x, y\rangle^2,$$

ale to jest możliwe tylko jeśli $\langle x, y\rangle = 0$.

(c) Na odwrót, pokazać, że dowolne wektory wzajemnie ortogonalne spełniają powyższy warunek. (3p)

Rozwiązanie: Tym razem mamy $\langle x, y\rangle = 0$, a więc

$$\|x + \lambda y\|^2 = \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\lambda\langle x, y\rangle + \lambda^2\langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \lambda^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2.$$

3. Określmy operator $T : C([-1, 1]) \to C([-1, 1])$ wzorem

$$(Tf)(x) = f(x) - f(-x).$$

(a) Obliczyć normę T (gdy w $C([-1, 1])$ obowiązuje norma supremum). (4p)

Rozwiązanie: Dla dowolnej funkcji $f \in C([-1, 1])$ mamy

$$\|Tf\| = \sup_{x\in[-1,1]} |(Tf)(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - f(-x)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f(-x)| = 2\|f\|,$$

a więc $\|T\| \leq 2$. Z kolei biorąc $f(x) = x$ dostajemy $(Tf)(x) = x - (-x) = 2x$, a więc $Tf = 2f$, co w połączeniu z powyższym oszacowaniem oznacza, że $\|T\| = 2$.

(b) Wyznaczyć jądro T. (4p)

Rozwiązanie: Jądro T składa się z takich funkcji f, dla których Tf jest funkcją tożsamościowo równą zeru. Innymi słowy

$$f \in \operatorname{Ker} T \iff \forall x \in [-1, 1] Tf(x) = 0 \iff \forall x \in [-1, 1] f(x) = f(-x),$$

czyli jądrem T jest zbiór funkcji parzystych ciągłych na $[-1, 1]$.

(c) Wyznaczyć obraz T. (4p)

Rozwiązanie: Przede wszystkim zauważmy, że dla każdego $f \in C([-1, 1])$ funkcja Tf jest nieparzysta:

$$Tf(-x) = f(-x) - f(x) = -Tf(x)$$

Obraz T na pewno zatem zawiera się w zbiorze funkcji nieparzystych (i ciągłych na $[-1, 1]$). Sprawdźmy, czy w wyniku działania T możemy dostać wszystkie takie funkcje: niech g będzie dowolną ciągłą funkcją nieparzystą i niech $f(x) = \frac{g(x)}{2}$. Wówczas f również jest funkcją nieparzystą i dla każdego $x \in [-1, 1]$ mamy

$$Tf(x) = f(x) - f(-x) = 2f(x) = g(x).$$

Oznacza to, że obrazem T jest zbiór funkcji nieparzystych ciągłych na $[-1, 1]$.